

太極球の背景に潜む対称性

一般化された太極球に関する数学的な対称性とその応用

SYMMETRY ON THE BACK OF THE TAIJI SPHERE

Mathematical Symmetry Concerning the Generalized Taiji Sphere and Its Applications

大内 克哉	芸術工学教育センター 教授
杉浦 康平	アジアデザイン研究所顧問 名誉教授
黄 國賓	芸術工学部ビジュアルデザイン学科 教授
シュワーベ カスパー	芸術工学ファッションデザイン学科 教授
見明 暢	芸術工学部プロダクト・インテリアデザイン学科 准教授
榮元 正博	芸術工学部ビジュアルデザイン学科 准教授
尹 智博	芸術工学教育センター 助教

Katsuya OUCHI	Center for Art and Design Education, Professor
Kohei SUGIURA	Advisor of Research Institute of Asian Design, Professor Emeritus
KUO-PIN HUANG	Department of Visual Design, School of Arts and Design, Professor
Caspar SCHWABE	Department of Fashion and Textile Design, School of Arts and Design, Professor
Nobu MIAKE	Department of Product and Interior Design, School of Arts and Design, Associate Professor
Masahiro EIGEN	Department of Visual Design, School of Arts and Design, Associate Professor
Jibak YOON	Center for Art and Design Education, Assistant Professor

要旨

太極球とは、アジアデザイン研究所が2013年度以来、平面図形としての太極図をどのようにして、立体へと変容させようのかという観点に基づいて、研究調査・実験を進めてきた上で得られた立体図形である。そこでは太極図を、平面図形上で一定の方向に回転させつつ、中心点の垂直軸上に次々に積み重ねることで立体作図を作成した。

太極球の大きな特徴として、同一形状の太極球を二つ用意すると、それらは隙間なく組み合わせ、最終的に一球体が形作られるという性質がある（「陰陽一球体化」の性質）。

本論文では、特にそのような数学的特性に着目し、二つの同一形状の立体図形が隙間なく組み合わせるために必要な性質を明らかにした上で、最終的に系がそのような特性を持つ必要十分条件を導出する。

その目的を達成する過程の中で、現在の太極球をより抽象かつ制限の少ない3次元図形として定義し直しているが、その応用として、組み合わせの性質を持つような他の形状の可能性についても議論し、いくつかの日用品を例示する。

Summary

“Taiji Sphere” is a solid figure which is given by research and experiments based on the viewpoint of how the Taijitu as a plane figure can be transformed to a three-dimensional object. (Research Institute of Asian Design, formed 2013). As the result, the solid figure has been formed by piling up perpendicularly many Taijitus one after another, rotating around the center.

The Taiji Sphere is characterized to have an obvious property that two identical Taiji Spheres can fit into each other with no gaps and finally form a complete sphere.

In this paper, we focus on the mathematical property, and find out what determines the characteristics. We finally establish the necessary and sufficient conditions to fit each other.

In the process of developing the formula, we have redefined the current Taiji Sphere as three-dimensional objects, which are more abstract and thus have less limitations. As an application for the process, we discuss the possibility of other forms to fit each other, and investigate several necessities as examples.

1. 研究の背景

陰と陽が巴形をなして向いあい、ともに渦巻き、ひとめぐりして一円相を生み出す「太極図」。太極の内部で生まれた陰・陽変転の動きが万象誕生の根源にあることを示す、ユニークな図形である。この図形の陰と陽の形は抱きあいながら、「二分し、分割する」のではなく、流動して「溶けあい、一になる」ことが示されている。

「分かれて、なお一になる」は、中国だけでなく、アジア各地に普及した考え方で、対立と融和を摸索する今日の現代社会で、再考すべき重要な主題となっている。

これまでの私たちは、この円相図形が示す強烈なイメージの魅力にとらわれ、太極図を完成された「一つの平面図形」として見つめ、黒・白二色の巴形が渦巻く一円相が生み出す多彩な意味を汲みとってきた。だが、古代から、中国の人びとが保ち続ける玉石や真珠に対するただならぬ嗜好、円形や球体に対する執拗な探究心に思いをいたすと、私たちの心に、「太極図もまた、球体と見ることができるのではないか...」というアイデアがひらめいた。

本学アジアデザイン研究所は、2013年度以来、太極図をどのようにして立体へと変容させるのか、平面図形としての円形から三次元の球体へと、どのようにしてその形をふくらませることが出来るのだろうかという仮説に基づき、研究調査、実験を進めてきた。

私たちのアイデアは、「太極図を、平面図形上での渦巻き方向(時計回り)に回転させ、この回転図形を、中心点の垂直軸上に次々に積み重ねて、立体作図をする...」というものであった。

具体的にその方法を記せば、「一つの球体の垂直中心軸、その底部から頂点までを、水平に180等分する。すると球体の中に、180枚の大きさが異なる円板(底点の第1枚目と頂点の180枚目は直径が0になり、90枚目と91枚目は直径が最大になる)が積層することになる。最下部の円板から始めて、上部の円板に向かって1°(1度)ずつ、それぞれの円板の大きさを旋回する太極図を積み重ねてゆく。位置・大きさが変化しつづける回転する太極図。その全体が積み重なる球体像を、立体図と

して描き出す...」というものであった。

太極図は次々に角度を変え、回転しながらその形をふくらませて、中央で最大の直径に到達する。さらに上に向かってその形を縮小し、最頂点の直径0にいたって旋回を終える。3D作図により克明に描かれた太極球の内部に眼をこらすと、「太極図の旋回」と、「外周の膨張から縮小へ」という二つの動きが絡みあって、予想をこえた回転体の形、つまり、「二つの渦巻きものを包みこんだ一つの完全球体」の全容が見えてくる。陰の回転体・陽の回転体は逆向きに隙間なく抱きあって、太極図の場合と同じように一球体を形づくる様子が見てとれる⁶⁾。

そのようにして、従来から知られている平面図形としての太極図を拡張することにより立体図形としての太極球が構築されたが、更に著者らは、その背後にある数学的な枠組みにも着目し、上記のアイデアを回転行列で表現することにも成功した⁷⁾。

一方で、これまでの研究で得られた太極球の大きな特徴として、陰の回転体と陽の回転体は形状としては全く同一であり、それらが隙間なく組み合わせることによって、最終的に一球体が形作られることが知られている。以降、このような性質を「陰陽一球体化」と呼ぶ。しかしながら、なぜそのような性質があるのか、またどのような条件を整えばそのような性質が得られるのかといった基本的な数学的な枠組みは明らかにされていなかった。

そこで本研究では、これまでに得られた太極球に対する数学的な性質⁷⁾を基礎としつつ、陰陽一球体化を保証するための数学的な条件を明らかにすることを目的とする。そのような目的に到達するプロセスとして、現在の太極球をより抽象的かつ制限の少ない3次元図形として定義し直すことが必要である。ここではそのような太極球を内包する数理モデルを構築した上で、陰陽一球体化が可能となる数学的条件を解明する。またその応用の一例として、陰陽一球体化の性質を持つような他の形状の可能性についても議論し、いくつかの日用品を例示する。

2. 研究の方法

本研究では、まずこれまでの研究で得られた太極球を内包するような、より広範な3次元数理モデルを定義する。以降それを「一般化された太極球」と呼ぶことにする。その定義において、線形変換の範囲内で最も一般的なアフィン変換を土台としてモデルを構築する。そのため本研究では、非線形変換は考察の対象に含めない。その上で、陰陽一球体化が可能となるための必要十分条件を導き出す。

また、本論文で最終的に得られる一般化された太極球の枠組みは、数学的に定式化された3次元モデルの形態を採る。得られた結果を視覚的に確認するのに適したツールとして、ProcessingやopenFrameworksを始めとする様々なプログラム開発環境が存在するが、今回はそれらの中でRhinoCeros 7とそれを数学的に制御するためのRhinoPython⁹⁾を用いることにする。これらの開発環境を用いる利点は、得られた3次元モデルをモニター上で視覚的に確認するだけでなく、3Dプリンターを用いて実際に出力することが可能である点にある¹⁰⁾。本論文でも、いくつかの結果を3Dプリンターでの出力を行っている。

3. 研究内容

3.1. 一般化された太極球の定義

本稿では、3次元化された太極球に対して、z軸に垂直な任意の断面においてxy平面に相似な2次元太極図が現れるという制限を設けた上で、その対称性の根拠やより一般的な太極球の可能性を議論する。

太極球の対称性を考えるために、最初により一般的な形式で太極球を再定義しよう。基本的なフレームワークとして、まずxy平面上に従来の2次元太極図を構築した後、z軸方向に太極球を拡張する。以降、2次元太極図の各構成要素を図1のように、それぞれ「太極曲線」、「魚眼線」、及び「太極外曲線」と呼ぶこととする。またz軸方向に拡張された曲面をそれぞれ、太極曲面、魚眼面、及び太極外曲面と呼ぶ。

まず、太極曲面について考察する。2つの媒介変数

$-1 \leq t \leq 1$ (z軸方向) 及び $-1 \leq s \leq 1$ (xy平面用) を導入することにより、一般化された太極曲面を

$$\begin{pmatrix} X(s, t) \\ Y(s, t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_x(t) \\ \delta_y(t) \\ \delta_z(t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

で定義する。ここで $(\delta_x(t), \delta_y(t), \delta_z(t))^T$ は、アフィン変換による平行移動を3次元に拡張した項である。

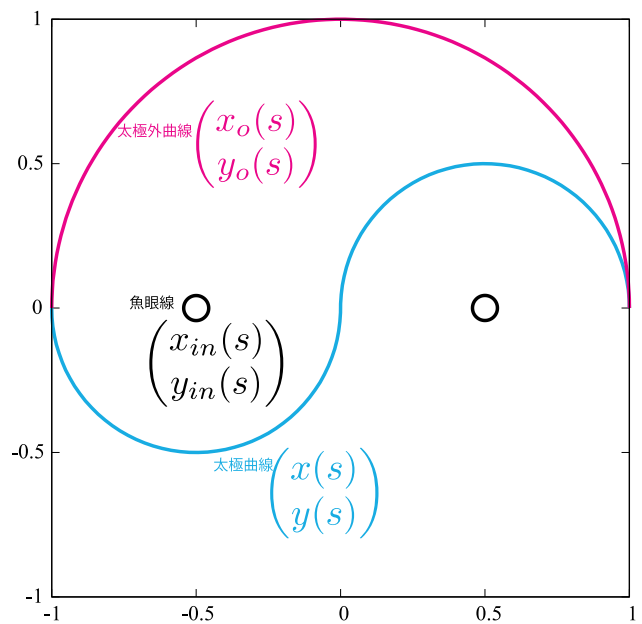


図1: 「太極曲線」 $(x(s), y(s))$ 、「太極外曲線」 $(x_o(s), y_o(s))$ 、及び「魚眼線」 $(x_{in}(s), y_{in}(s))$ の定義。

それぞれの形状は後述する(7)式、(12)式、及び(14)式の対称性を持つものとする。この図で記載された形状はその一例である。一方で $A(t)$ は

$$A(t) \equiv \begin{pmatrix} A_2(t) & a_{13}(t) \\ 0 & 0 & a_{23}(t) \\ 0 & 0 & a_{33}(t) \end{pmatrix} \quad (2)$$

の形に制限される 3×3 行列で、ねじり及び拡大縮小を含むxy平面での線形変換を表す。なお $A_2(t)$ は

$$A_2(t) \equiv \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \quad (3)$$

で定義される2次元行列である。(1)式の第1成分及び第2成分は

$$\begin{pmatrix} X(s, t) \\ Y(s, t) \end{pmatrix} = A_2(t) \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13}(t)z(t) + \delta_x(t) \\ a_{23}(t)z(t) + \delta_y(t) \end{pmatrix} \quad (4)$$

であることから、改めて $a_{13}(t)z(t) + \delta_x(t) \rightarrow \delta_x(t)$ 、 $a_{23}(t)z(t) + \delta_y(t) \rightarrow \delta_y(t)$ と置き直すことで、一般性を失うことなく

$$a_{13}(t) = a_{23}(t) = 0 \quad (5)$$

とすることができる。一方で、3行1列及び3行2列は、 z 軸に垂直な任意の断面において xy 平面に相似な2次元太極図が現れるという制限から、 $Z(t)$ が s に依存してはいけないため、0でなければならない。

なお(4)式は、 xy 平面でのアフィン変換を表している。また $(x(s), y(s), z(t))^T$ は、ある単調増加関数 $f(t)$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}(s) \\ \hat{y}(s) \\ f(t) \end{pmatrix} \quad (6)$$

の形で制限されるベクトルとする。ここで $\hat{x}(s)$ 及び $\hat{y}(s)$ は、2次元太極図の特性を保証するという条件から、 s に対して奇関数、すなわち

$$\hat{x}(s) = -\hat{x}(-s), \quad \hat{y}(s) = -\hat{y}(-s) \quad (7)$$

を仮定する。

(1)式の第3成分における具体的な形は、

$$Z(t) = a_{33}(t)f(t) + \delta_z(t) \equiv F(t) \quad (8)$$

であるが、 $F(t)$ は単調増加関数でなければならないことから、その逆関数を用いる事で $t = F^{-1}(t')$ となる t' が存在する。この式を(1)式に代入すると、明らかに $Z(t') = F(F^{-1}(t')) \equiv t'$ であることから、

$$\begin{pmatrix} X(s, t') \\ Y(s, t') \\ Z(t') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2[F^{-1}(t')] & 0 \\ 0 & 0 & t' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(t') \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_x[F^{-1}(t')] \\ \delta_y[F^{-1}(t')] \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

とすることができる。ここで

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}(s) \\ \hat{y}(s) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

である。(9)式において改めて $t' \rightarrow t$ と置くことにより $a_{33}(t) = t$ 、 $\delta_z(t) = 0$ 、 $z(t) = 1$ とした時の(1)式が得られる。また、一般性を失うことなく $A_2[F^{-1}(t)] \rightarrow A_2(t)$ などと定義し直すことができる。すなわち、 z 成分の関数形 $f(t)$ と $\delta_z(t)$ は $A(t)$ や $\delta_x(t)$ 、 $\delta_y(t)$ に繰り込めることが分かる。 $Z(t) = t$ の実装には任意性があるが、ここでは(9)式、すなわち $f(t) = 1$ 、及び $\delta_z(t) = 0$ で実装することにする。後に分かるように、この解釈は一般化された太極球における数学的意味に重要な役割を与える。

次に魚眼線が

$$\begin{pmatrix} x_{in}(s) \\ y_{in}(s) \\ z_{in}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_{in}(s) \\ \hat{y}_{in}(s) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

により構成されるものとする(図1参照)。ここで(7)式と同様に、 s に対して奇関数、すなわち

$$x_{in}(s) = -\hat{x}_{in}(-s), \quad y_{in}(s) = -\hat{y}_{in}(-s) \quad (12)$$

を満たすものとする。一方で、一般化された太極外曲線は

$$\begin{pmatrix} x_o(s) \\ y_o(s) \\ z_o(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_o(s) \\ \hat{y}_o(s) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

の形を仮定する(図1参照)。ただし、太極外曲線の形状から

$$\hat{x}_o(s) = -\hat{x}_o(-s), \quad \hat{y}_o(s) = \hat{y}_o(-s) \quad (14)$$

の対称性を仮定する。すなわち $\hat{y}_o(s)$ は偶関数であるとする。

2次元太極図における太極曲線と太極外曲線の接続条件から

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_o(\pm 1) \\ \hat{y}_o(\pm 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}(\pm 1) \\ \hat{y}(\pm 1) \end{pmatrix} \quad (15)$$

を満たさなければならない。x成分の式において

$\hat{x}_o(\pm 1) = \hat{x}(\pm 1) = \pm 1$ に規格化する。一方でy成分の式から、 $\hat{y}_o(1) = \hat{y}(1)$ 、 $\hat{y}_o(-1) = \hat{y}(-1) = -\hat{y}(1)$ となる。ここで $\hat{y}_o(-1) = \hat{y}_o(1)$ であることから、 $\hat{y}(1) = -\hat{y}(1)$ 、すなわち $\hat{y}(1) = 0$ 、またそれによって $\hat{y}(-1) = 0$ でなければならない。最終的に(15)式は

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_o(\pm 1) \\ \hat{y}_o(\pm 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}(\pm 1) \\ \hat{y}(\pm 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

に制限される。

$\hat{x}_o(s)$ 及び $\hat{y}_o(s)$ が太極外曲線、すなわち2次元太極図の外縁であることを保証するために、次の条件を満たさなければならない。系の対称性から、一般性を失うことなく $s \geq 0$ のみを考えれば良い。任意の $s \geq 0$ に対して

$$\theta(s) \equiv \arctan \frac{\hat{y}_o(s)}{\hat{x}_o(s)} \quad (17)$$

となる $\theta(s)$ を決めることができる。その $\theta(s)$ に対して

$$\frac{\hat{y}(s')}{\hat{x}(s')} = \tan \theta(s) \quad (18)$$

を満たす $s'(s)$ が s の関数として一意に決まる。そのような s と $s'(s)$ に対して、太極外曲線は常に太極曲線の外側でなければならないことから

$$\hat{x}_o(s)^2 + \hat{y}_o(s)^2 \geq \hat{x}(s')^2 + \hat{y}(s')^2 \quad (19)$$

でなければならない。

(10)式、(11)式、及び(13)式により得られる形状を図2に示しておく。この形状を以降原始太極図と呼ぶ。一般化された太極球を形成するには、この原始太極図の構成要素(10)式、(11)式、及び(13)式全てに対して(9)式によるアフィン変換が施さなければならない。

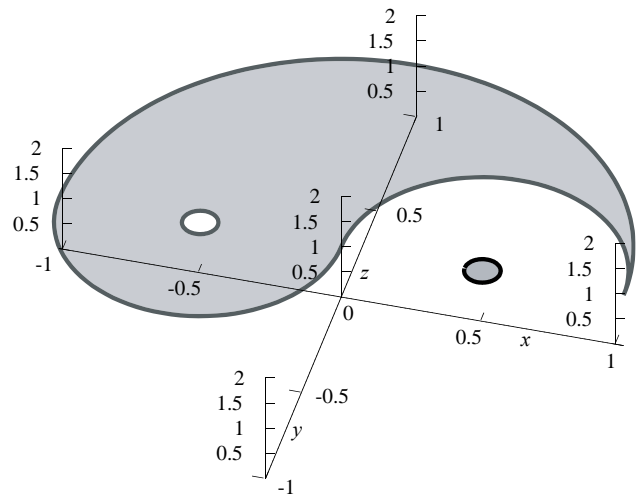


図2: 式(10)、(11)、及び(13)により構成された原始太極図の一例。式内にある関数 $\hat{x}(s)$ 、 $\hat{y}(s)$ 、 $\hat{x}_m(s)$ 、 $\hat{y}_m(s)$ 、及び $\hat{x}_o(s)$ 、 $\hat{y}_o(s)$ は後述する(37)-(38)式、(39)-(40)式、及び(41)式を採用している。

$A_2(t)$ で定義される線形変換は、更に拡大行列 $S(t)$ 、変形行列 $\Gamma(t)$ 、回転行列 $\Theta_2(t)$ 、及び剪断行列 $\Delta(t)$ の積に分解できることが知られている。ここで、それぞれの行列を

$$\begin{aligned} S(t) &\equiv \begin{pmatrix} R(t) & 0 \\ 0 & R(t) \end{pmatrix} \\ \Gamma(t) &\equiv \begin{pmatrix} \gamma(t) & 0 \\ 0 & \gamma(t)^{-1} \end{pmatrix} \\ \Theta_2(t) &\equiv \begin{pmatrix} \cos \phi(t) & -\sin \phi(t) \\ \sin \phi(t) & \cos \phi(t) \end{pmatrix} \\ \Delta(t) &\equiv \begin{pmatrix} 1 & \delta(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta(t) & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

で表すことにする。ここで $\Theta_2(t)$ 内にある $\phi(t)$ は、ねじれの程度を表している。また $R(t)$ は、実際には外形の形状を決定するのに使われる。

3.2. 一般化された太極球の対称性についての考察

3.2.1. 太極曲面に対する対称性

対称性(7)式を使うことで $s \rightarrow -s$ に対して、(9)式(ただし $A(t)$ 、 $\delta_x(t)$ 、 $\delta_y(t)$ は(10)式以下の本文にあるように再定義している)は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X(-s, t) \\ Y(-s, t) \\ Z(t) \end{pmatrix} &= A(t) \begin{pmatrix} -\hat{x}(s) \\ -\hat{y}(s) \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_x(t) \\ \delta_y(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -a_{11}(t)x(s) - a_{12}(t)y(s) + \delta_x(t) \\ -a_{21}(t)x(s) - a_{22}(t)y(s) + \delta_y(t) \\ t \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

となる。ここで太極曲面 $(X(s, t), Y(s, t), Z(t))^T$ を、 z 軸の周りで π だけ回転しよう。すると

$$\begin{aligned} \Theta_z(\pi) \begin{pmatrix} X(s, t) \\ Y(s, t) \\ Z(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(s, t) \\ Y(s, t) \\ Z(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -a_{11}(t)x(s) - a_{12}(t)y(s) - \delta_x(t) \\ -a_{21}(t)x(s) - a_{22}(t)y(s) - \delta_y(t) \\ t \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

となる。ここで $\Theta_z(\theta)$ は

$$\Theta_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

で定義される、 z 軸周りの回転行列である。これより、

$$\delta_x(t) = \delta_y(t) = 0 \quad (24)$$

の時のみ、すなわち太極曲面は

$$\begin{pmatrix} X(s, t) \\ Y(s, t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}(s) \\ \hat{y}(s) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

の形に制限された時のみ

$$\Theta_z(\pi) \begin{pmatrix} X(s, t) \\ Y(s, t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(-s, t) \\ Y(-s, t) \\ Z(t) \end{pmatrix} \quad (26)$$

が成立する。これは、(25)式で定義される太極曲面が、 z 軸周りの π 回転で元の図形と合致することを保証している。結果的に、(25)式が(太極曲面を含む)一般化された太極球の最終的な定義となる。

一方、 $-1 \leq s \leq 1$ を媒介変数とする任意の関数 $x(s)$ と $y(s)$ を使って定義されたベクトル $(x(s), y(s), 1)^T$ を考えてみる。このベクトルを元に(1)式を用いて構築された曲面 $(X(s, t), Y(s, t), Z(t))^T$ に対して、(22)式のように z 軸の周りで π だけ回転したとする。この図形が元の図形と一致するためには、(7)式が成立しなければならないことが容易に証明できる。このことは、(25)式の変換を考える際に、(7)式が成立することが太極曲面が z 軸周りの π 回転で元の図形と合致する必要十分条件であることを意味している。

ここで(25)式の数学的な意味を考えてみよう。

$(\hat{x}(s), \hat{y}(s), 1)^T$ は $z = 1$ の平面上に作成された原始太極図

(図2参照)を表している。その原始太極図に対して、ある $-1 \leq t_0 \leq 1$ による行列を演算することは、 $A_2(t_0)$ という線形変換が施された原始太極図を $z = t_0$ 平面上に配置することを意味する。すなわち(25)式は、 t を -1 から 1 に変化させることで原始太極図に次々と線形変換を施しながら $z = t$ の平面上に配置することを意味しており、そのような一連のプロセスによって一般化された大極球を構築しているのである。図3に、そのシミュレーション結果を示している。原始太極図として図2に示した一連の関数を用いた。ただし魚眼線は省略している。 $n = 1, 2, \dots, 10$ に対して $t(n) = -1 + (n - 1/2)/5$ として(25)式に代入した結果を示した。

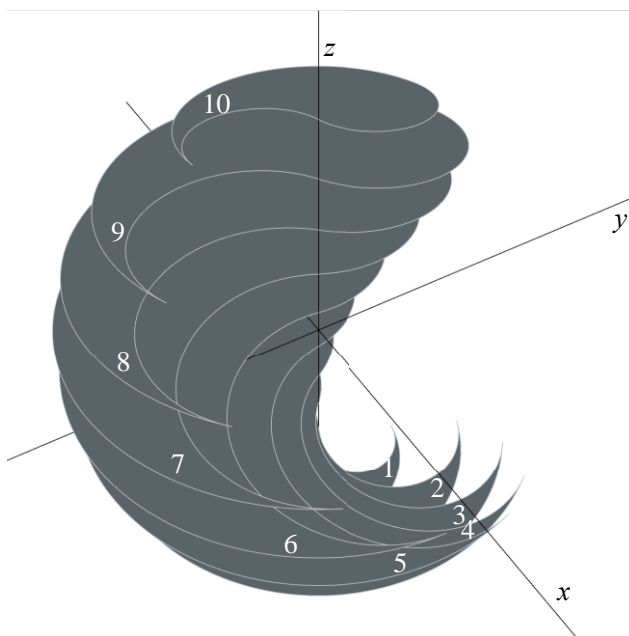


図3：(25)式の可視化。それぞれの数字 $n = 1, 2, \dots, 10$ に対して、 $t(n) = -1 + (n - 1/2)/5$ として、(25)式を計算する。

この対称性を保証するのに決定的な役割を果たしているのが(7)式であることが分かる。なお

$$\Theta_x(\pi)\Theta_y(\pi) = \Theta_z(\pi) \quad (27)$$

が成立することが簡単に確かめられることから、 y 回転の後に x 回転を行うと(その逆も可)、 z 回転を行なったものと同じであることが分かる。

3.2.2. 魚眼面と太極外曲面に対する対称性

この太極曲面に対する対称性の証明は、(11)式で表される魚眼面に対しても、(7)式と同様な(12)式を満たしていることから明らかに成立する。一方で、(13)式で表される太極外曲面の対称性は(14)式であることから、太極曲面のような対称性を満たしていない。実際、 $s \rightarrow -s$ に対して

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_o(-s, t) \\ Y_o(-s, t) \\ Z_o(t) \end{pmatrix} &= A(t) \begin{pmatrix} -\hat{x}_o(s) \\ \hat{y}_o(s) \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -a_{11}(t)x_o(s) + a_{12}(t)y_o(s) \\ -a_{21}(t)x_o(s) + a_{22}(t)y_o(s) \\ t \end{pmatrix} \\ &\neq \Theta_z(\pi) \begin{pmatrix} X_o(s, t) \\ Y_o(s, t) \\ Z_o(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

であり、最後は不等号となってしまふ。ここでもし、 $y_o(s) \rightarrow -y_o(s)$ の変換を行なったとすれば最後が等号になるが、これは xz 平面に対する鏡像に他ならない。そしてこの鏡像による対称性こそが、太極外曲面が回転により反転し、最終的に一般化された太極球が形成されることを保証している。

なお、ここで行なった証明は、数学的に2つの図形が合致することを示しているだけであり、実際に組み合わせるかどうかは保証していない。具体的な形状によっては、物理的にはまらないこともあり得る。

以上の考察において、以下の関数形は不連続性も含めて任意であることが分かる。すなわちいかなる場合でも成立する。

- (7)式、(12)式、(14)式の条件を満たす太極曲線：
 $\hat{x}(s)$ 、 $\hat{y}(s)$ 、魚眼線： $\hat{x}_m(s)$ 、 $\hat{y}_m(s)$ 、及び太極外曲線： $\hat{x}_o(s)$ 、 $\hat{y}_o(s)$
- 外形： $R(t)$
- 変形： $\gamma(t)$ 及び剪断： $\delta(t)$
- ねじれを決める関数： $\phi(t)$

以上が、本論文の主要な結果であり、以降一連の枠組

みを「一般化された太極球のフレームワーク」と呼ぶことにする。

3.3. 一般化された太極球の具体的な形状

ここまでは、一般化された太極球に対する数学的な対称性について議論してきた。ここからはより具体的な形状について考察を行う。まず(3)式で表される $A_2(t)$ であるが、ここでは $A_2(t) \equiv S(t)\Gamma(t)\Theta_2(t)\Delta(t)$ の順番で分解するものとする、その具体的な形状は

$$A_2(t) = R(t) \times \begin{pmatrix} \gamma(t) \cos \phi(t) & \gamma(t)[\delta(t) \cos \phi(t) - \sin \phi(t)] \\ \gamma(t)^{-1} \sin \phi(t) & \gamma(t)^{-1}[\delta(t) \sin \phi(t) + \cos \phi(t)] \end{pmatrix} \quad (29)$$

となる(分解の順番を変えると、表式は変更される)。

ここで、 $z = t(-1 < t < 1)$ で定義される平面を用いて得られる、一般化された太極球の切断面を考える。上記の考察からそれは $A_2(t)$ による線形変換が施された原始太極図であることが分かる。ここではそれが常に原始太極図と相似形であるという条件を課すと、(29)式から変形行列及び剪断行列を単位行列、すなわち $\gamma(t) = 1$ 及び $\delta(t) = 0$ にしなければならないことが分かる。その場合は、 $A_2(t) = R(t)\Theta_2(t)$ と簡単化されることから、(25)式は

$$\begin{pmatrix} X(s, t) \\ Y(s, t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(t) \cos \phi(t) & -R(t) \sin \phi(t) & 0 \\ R(t) \sin \phi(t) & R(t) \cos \phi(t) & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}(s) \\ \hat{y}(s) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (30)$$

と表される。(31)式において $R(t)$ 、及び $\phi(t)$ はなお任意の関数である。

3.3.1. (30)式における $\phi(t) \rightarrow -\phi(t)$ に対する対称性

先に話を進める前に、一般化された太極球の形状を(30)式に制限した際の、逆回転 $\phi(t) \rightarrow -\phi(t)$ に対する対称性を考える。 $\phi(t) \rightarrow -\phi(t)$ とした時の太極球の形状を $[X^{(r)}(s, t), Y^{(r)}(s, t), Z^{(r)}(t)]^T$ と置く

$$\begin{pmatrix} X^{(r)}(s, t) \\ Y^{(r)}(s, t) \\ Z^{(r)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}(s)R(t) \cos \phi(t) + \hat{y}(s)R(t) \sin \phi(t) \\ -\hat{x}(s)R(t) \sin \phi(t) + \hat{y}(s)R(t) \cos \phi(t) \\ t \end{pmatrix} \quad (31)$$

である。これを y 軸に対して π だけ回転すると

$$\Theta_y(\pi) \begin{pmatrix} X^{(r)}(s, t) \\ Y^{(r)}(s, t) \\ Z^{(r)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^{(r)}(s, t) \\ -\hat{x}(s)R(t) \cos \phi(t) - \hat{y}(s)R(t) \sin \phi(t) \\ -\hat{x}(s)R(t) \sin \phi(t) + \hat{y}(s)R(t) \cos \phi(t) \\ -t \end{pmatrix} \quad (32)$$

が得られる。更に $t \rightarrow -t$ かつ $s \rightarrow -s$ とする。ここで

$$R(t) = R(-t), \quad \phi(-t) = -\phi(t) \quad (33)$$

に制限すると、最終的に

$$\Theta_y(\pi) \begin{pmatrix} X^{(r)}(-s, -t) \\ Y^{(r)}(-s, -t) \\ Z^{(r)}(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}(s)R(t) \cos \phi(t) - \hat{y}(s)R(t) \sin \phi(t) \\ -\hat{x}(s)R(t) \sin \phi(t) - \hat{y}(s)R(t) \cos \phi(t) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(s, t) \\ -Y(s, t) \\ Z(t) \end{pmatrix} \quad (34)$$

が得られる。すなわち、 $Y(s, t)$ 成分に対して鏡像変換となるため、最終的に元の図形の鏡像となることから、2つが組み合わさる形状とはならない。すなわち、一般化された太極球としての性質を持たない。なお、 $\phi(t) = \phi(-t)$ の場合は

$$\Theta_y(\pi) \begin{pmatrix} X^{(r)}(-s, -t) \\ Y^{(r)}(-s, -t) \\ Z^{(r)}(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}(s)R(t) \cos \phi(t) + \hat{y}(s)R(t) \sin \phi(t) \\ \hat{x}(s)R(t) \sin \phi(t) - \hat{y}(s)R(t) \cos \phi(t) \\ t \end{pmatrix} \quad (35)$$

となることから、全く元の形状との対称性が存在しない。このことから、逆回転 $\phi(t) \rightarrow -\phi(t)$ に対する対称性は存在しないことが分かる。

3.3.2. 太極球の具体的な形状

太極球の形状を規定する $R(t)$ かつ $\phi(t)$ はなお任意の関数であるとした上で、2次元太極図の具体的な形状を記述する $\hat{x}(s)$ 、 $\hat{y}(s)$ 、 $\hat{x}_m(s)$ 、 $\hat{y}_m(s)$ 、及び $\hat{x}_o(s)$ 、 $\hat{y}_o(s)$ を先に確定しよう。ただし、(7)式、(12)式、及び(14)式の対称性を保証する限りにおいて、以下に規定する具体的な形状に制限しなくても一般化された太極球の対称性は保たれることは注意を要する。

最初に、

$$H(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s \geq 0 \\ -1 & \text{if } s < 0 \end{cases} \quad (36)$$

で定義されるステップ関数 $H(s)$ を導入した上で、太極曲線 $\hat{x}(s)$ 、 $\hat{y}(s)$ を

$$\hat{x}(s) = \frac{H(s)}{2} [1 - \cos(\pi s)] \quad (37)$$

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{2} \sin(\pi s) \quad (38)$$

また、魚眼線 $\hat{x}_m(s)$ 、 $\hat{y}_m(s)$ を

$$\hat{x}_{in}(s; \alpha) = \frac{H(s)}{2} [1 - \alpha \cos(2\pi s)] \quad \text{without } s = 0 \quad (39)$$

$$\hat{y}_{in}(s; \alpha) = \frac{1}{2} \alpha \sin(2\pi s) \quad (40)$$

で定義しよう。ここで $0 < \alpha < 1$ は大極曲線に対する魚眼線の大きさの比を規定するパラメータである。

なお(39)式は $s = 0$ で不連続となるが、その点は定義の範囲外である。すなわち、魚眼線は $-1 \leq s < 0$ 及び $0 < s \leq 1$ の範囲内でのみ定義されるものとする。また太極外曲線を

$$\begin{aligned} \hat{x}_o(s) &= \sin(\pi s/2) \\ \hat{y}_o(s) &= \cos(\pi s/2) \end{aligned} \quad (41)$$

で定義する。

これらの式を描画したものが図4である。

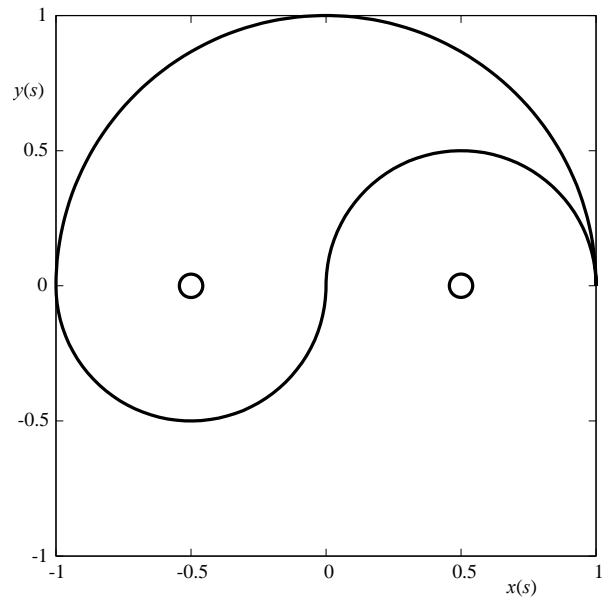


図4: (37)-(38)式、(39)-(40)式、及び(41)式によって得られる2次元太極図

このようにして原始太極図の形状を確定した上で、一般化された太極球の形は、任意の関数 $R(t)$ 及び $\phi(t)$ を用いてそれぞれ太極曲面の式

$$X(s, t) = \frac{R(t)}{2} \{H(s)[1 - \cos(\pi s)] \cos \phi(t) - \sin(\pi s) \sin \phi(t)\} \quad (42)$$

$$Y(s, t) = \frac{R(t)}{2} \{H(s)[1 - \cos(\pi s)] \sin \phi(t) + \sin(\pi s) \cos \phi(t)\} \quad (43)$$

$$Z(t) = t \quad (44)$$

及び魚眼面の式 ($s = 0$ は除く)

$$X_{in}(s, t; \alpha) = \frac{R(t)}{2} \{H(s)[1 - \alpha \cos(2\pi s)] \cos \phi(t) - \sin(2\pi s) \sin \phi(t)\} \quad (45)$$

$$Y_{in}(s, t; \alpha) = \frac{R(t)}{2} \{H(s)[1 - \alpha \cos(2\pi s)] \sin \phi(t) + \sin(2\pi s) \cos \phi(t)\} \quad (46)$$

$$Z_{in}(t) = t \quad (47)$$

によって得られる。また、太極外曲面は

$$X_o(s, t) = R(t) \sin[\pi s/2 - \phi(t)] \quad (48)$$

$$Y_o(s, t) = R(t) \cos[\pi s/2 - \phi(t)] \quad (49)$$

$$Z_o(t) = t \quad (50)$$

となることが分かる。

ここで $R(t) \geq 0$ は、一般化された太極球の外形を決める関数として解釈できることが分かる。一方で $\phi(t)$ はz軸周りのねじり具合を決定する関数となる。数学的な注意点として、 $R(t)$ は負の値になっても数学的には成立し対称性も保つが、実際に出力する際には $\{(0,0,Z(t_0)) | R(t_0) = 0\}$ の点でz軸での切断面が0となるため、例えば3Dプリンター等で出力する際には現実的ではない。

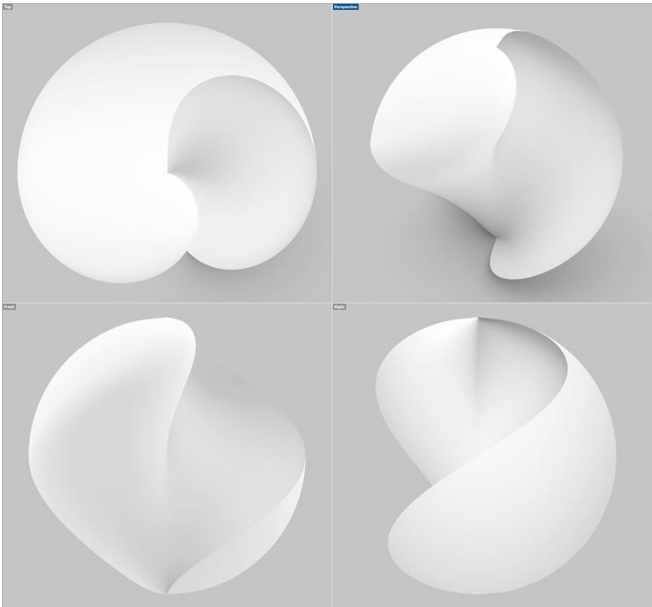


図5：様々な太極球の例。(51)式と(52)式を使って作成した。

3.3.3. 標準形

先行研究で扱われている太極球が、一般化された太極球のフレームワークの中でどのように再現されるかを述べる。先行研究の太極球は $R(t)$ 及び $\phi(t)$ をそれぞれ

$$R(t) = \sqrt{1-t^2} \quad (51)$$

$$\phi(t) = \frac{\pi}{2}t \quad (52)$$

とした時に得られる。具体的な形状を図5に載せている。(51)式は $R(t) = R(-t)$ 、(52)式は $\phi(t) = -\phi(-t)$ の対称性を持つ例である。なお以降の図は、RhinoPythonを用いて数式を処理した上で、RhinoCeros 7で3次元の形状を出力した結果である。全ての形状は、二つ同じ図形を用意した上で、一つをz軸の周りで π 回転すると、陰陽一球体化の性質を持つ。

3.3.4. $R(t)$ を変更した例

(52)式は同じ定義を用い、(51)式を

$$R(t) = \begin{cases} 1-t & \text{if } t \geq 0 \\ 1+t & \text{if } t < 0 \end{cases} \quad (53)$$

に変更した例を示す。具体的な形状を図6に載せている。この場合は2つの図形をはめると、ソロバン型の球のような外形が得られる。

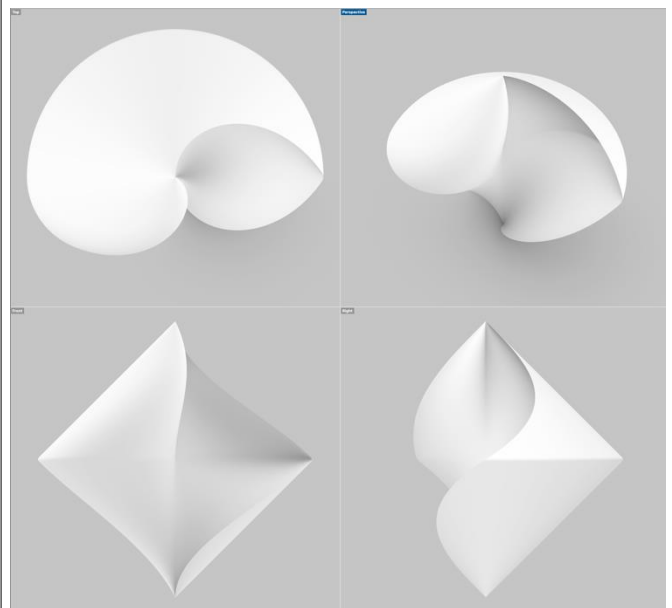


図6：様々な太極球の例。(53)式と(52)式を使って作成した

3.3.5. $\phi(t)$ を変更した例

(51)式は同じ定義を用い、 $\phi(t) = \phi(-t)$ の対称性を持つ例として(52)式を

$$\phi(t) = \frac{\pi}{2} \cos(\pi t) \quad (54)$$

に変更した例を示す。具体的な形状を図7に載せている。

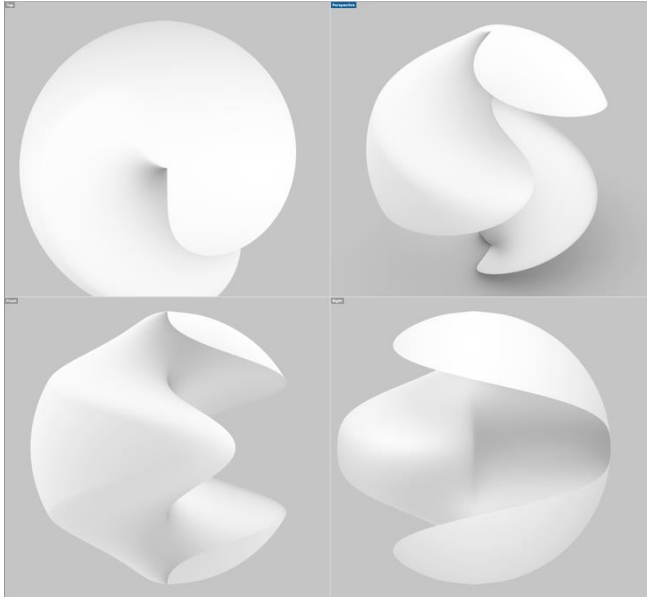


図7：様々な太極球の例。(51)式と(54)式を使って作成した。

3.3.6. ある $-1 < t_0 < 1$ において $R(t_0) = 0$ となるような例

実際に3Dプリンターで出力することは不可能であるが、参考としてある $-1 < t_0 < 1$ において $R(t_0) = 0$ となるような事例も提示しておく。ここでは(52)式は同じ定義を用い、(51)式を

$$R(t) = \sin(\pi t) \quad (55)$$

として描画を行なった。(55)式は $R(t) = -R(-t)$ の対称性を持ち、 $t_0 = 0$ である。具体的な形状を図8に載せておく。このような形状でも、陰陽一球体化の性質を持つことが分かる。但し、 $z = 0$ で断面積が0となるため、実際の3Dプリンターでの出力は不可能である。

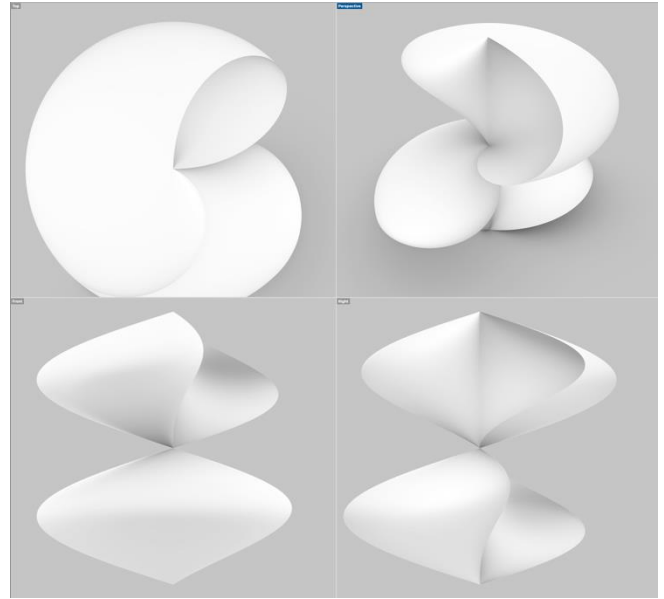


図8： $R(0) = 0$ となるような関数を用いて作成した太極球の形態。

3.4. 一般化された太極球を応用した形状

一般化された太極球は(25)式で定義されるが、この定義は非常に広い範囲の形状を網羅している。本研究で得られた一般化された太極球のフレームワークを応用することにより、様々な陰陽一球体化の性質を持つ形態を制作できることが分かる。そこでそのような応用例の一つとして、ある日用品の制作を試みる。重要な対称性は(7)式、(12)式、及び(14)式で与えられていることから、それ以外の関数は自由に選択することができる。 $A_2(t)$ に含まれる変形行列及び剪断行列を活用してもよいが、それは今後の課題として、ここではそれぞれ単位行列に限定した。また今回は太極曲線 $(x(s), y(s))$ 、太極外曲線 $(x_o(s), y_o(s))$ 、及び魚眼線 $(x_{in}(s), y_{in}(s))$ もそれぞれ(37)-(38)式、(39)-(40)式、及び(41)式に限定することにする。その結果、今回自由に使える関数は $R(t)$ と $\phi(t)$ のみである。それらの制限から、今回基本となる式は(30)式である。

本研究を応用した日用品の例として、陰陽一球体化の性質を持つお猪口と徳利の作成を試みる。ここではそれぞれ太極お猪口と太極徳利と呼ぶことにする。まず太極

お猪口の外形として

$$R(t) = 1 + (1+t)^2/8 \quad (56)$$

$$\phi(t) = \frac{\pi}{2}t \quad (57)$$

を採用した。ここで開口部は魚眼面を応用することにして、(39)-(40)式の $\alpha = 0.85$ とした。ただし、お猪口にするためには、底を設けなければならない。そのため魚眼面に対して $-14/15 < t \leq 1$ の範囲に制限することにより底を作成した。

一方で太極徳利の外径は

$$R(t) = \frac{2}{5} \left[1 - \frac{1}{2} \sin \left(\frac{4}{5} \pi t \right) \right] \quad (58)$$

を採用した。ここで $2/5$, $1/2$, $4/5$ といった定数は、徳利の形状を再現するために適当に調整している。なお $\phi(t)$ 、 α 、 t は全て太極お猪口と同じパラメータに設定している。また、太極お猪口と太極徳利のサイズを変更するため、スケールは徳利をお猪口の2倍に設定している。



図9：(a)太極お猪口と(b)太極徳利の形態。

得られた太極お猪口と太極徳利をそれぞれ図9(a)及び(b)に載せている。図10には、RhinoCeros 7 + RhinoPython で作成した太極お猪口を、3Dプリンターで出力した結果を載せている¹⁰⁾。



図10：RhinoCeros 7 + Python で作成した太極お猪口。3Dプリンターで出力している(出力はDMMに委託)。素材は「ナイロン ナチュラル」を用いた。

図11には、図9で作成した太極お猪口と太極徳利に対して、それぞれz軸周りに 180° 回転した図形を追加したものを示しており、ここから陰陽一球体化の性質をみてとることが出来る。外形は通常のお猪口と徳利のように見えるが、それぞれ二つのお猪口と徳利に分離可能である。

4. まとめと今後の課題

本研究では、二つの同じ形状の一般化された太極球が、どのような数学的条件を満たしていれば陰陽一球体化の性質を持つかを考察した。その結果、「太極曲線」 $(x(s), y(s))$ と魚眼線 $(x_{in}(s), y_{in}(s))$ が媒介変数 s に対して反対称であり、「太極外曲線」 $(x_o(s), y_o(s))$ が s に対して対称であることが、必要十分条件であることが分かった。一方で、それ以外の関数に関しては大きな自由度があることも明らかとなった。その結果を利用した応用例

として太極球以外の形状を制作することを試みた。

今回の一般化された太極球のフレームワークでは、系



図 11：図 9 に示した(a)太極お猪口と(b)太極徳利に、それぞれ 180° 回転した図形を追加したもの。

統的な処理が困難なため非線形変換については考察しなかった。ただし、応用としての作品制作も踏まえた今後の発展においては、非線形の変換も考慮する必要があるであろう。

本研究では、 $z = t(-1 < t < 1)$ で定義される平面で切り出される一般化された太極球の切断面が、常に原始太極図と相似形であるという条件を課すことにより、(29)式から変形行列及び剪断行列を単位行列、すなわち $\gamma(t) = 1$ 及び $\delta(t) = 0$ に制限している。一方で今後の発展として、この条件が太極球を考える上で妥当かどうかとも検討する必要がある。また、応用としての作品制作としても、これらの制限を取り除くことが考えられる。

更に、本研究では太極曲線、太極外曲線、及び魚眼線は全て、関数(37)-(38)式、(39)-(40)式、及び(41)式に制限した。これらは太極球を考える上では妥当な制限であろうが、本来は(7)式、(12)式、及び(14)式の対称性のみ

満たせば十分である。今後この一般化された太極球のフレームワークを応用する際には、これらの関数形も考察の対象にする必要があると考えられる。

参考文献

- 1) 来知徳(明)、『易経来註図解』、大千世界出版社、1995。
- 2) 李晶偉『太極與八卦の奥義與応用』、新智出版社、1995。
- 3) 吾妻重二、「周敦頤の<太極図>の考察」、『朱子学の新研究』、創文社、2004、pp.50-82。
- 4) 三浦國雄、「万物生成のダイナミズムを内包する太極」、杉浦康平他、『円相の芸術工学』、工作舎、2003、pp.236-256。
- 5) 三浦國雄、「太極図の思想史」、杉浦康平、『3D...太極球・誕生別冊』、神戸芸術工科大学アジアデザイン研究所、2018、pp.6-31。
- 6) 杉浦康平、「太極球をめぐるもの...龍・宝珠・龍袍・王宮」、三浦國雄、『3D...太極球・誕生別冊』、神戸芸術工科大学アジアデザイン研究所、2018、pp.35-68。
- 7) 大内克哉、「3D 太極球の数学的構造について」、杉浦康平他、『3D...太極球・誕生』、神戸芸術工科大学アジアデザイン研究所、2018、pp.48-56。
- 8) 黄國賓、「太極図とは何か」、杉浦康平他、『3D...太極球・誕生』、神戸芸術工科大学アジアデザイン研究所、2018、pp.36-47。
- 9) 三井和男、『Rhinceros×Python コンピュータショナル・デザイン入門』、彰国社、2016。
- 10) DMM.make、「モノづくりのためのプラットフォーム」、<https://make.dmm.com>、2021/7/22